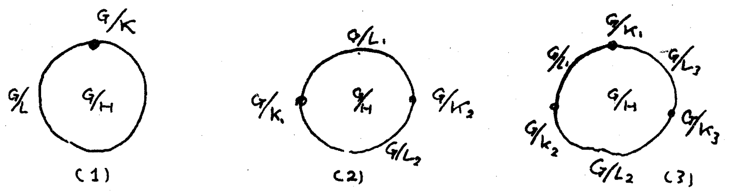
数理解析研究所講究録
319巻 1978年 107-114

余次元2の主軌道をもつ球面の変換群

新潟大理　　渡部　剛

Gを compact connected Lie group, Mを n 次元球面とし, GのM上への可微分作用で, effective で codimension 2 の principal orbit G/H, 少なくとも2つの singular orbit をもつものを考える. orbit の様子は orbit space $M^* = M/G$ が2次元円板だから次のように図示できる.



etc.

$i \neq j$ について $G/L_i = G/L_j$, $G/K_i = G/K_j$ となってもよい. s を isolated singular orbit G/K_i の個数とする.

次の結果が得られる.

<u>THEOREM</u>. (G, M) を上の性質をもつ変換群とする. $s = 1$ ならば $G = U(2)$, $M = S^6$ で次の作用と連続作用として同値である.

$U(2) \xrightarrow{\theta} SO(3)$ を kernel が $U(2)$ の中心である準同型とするとき $SO(3)$ の $\mathbb{R}^3$ への自然な作用から θ で導かれる $U(2)$ の $\mathbb{R}^3$ への作用

と $U(2)$ の $\mathbb{R}^4=\mathbb{C}^2$ への自然な作用との積により得られる $U(2)$ の $S^6\subset\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^4$ への作用.

REMARK 1. Theorem における $U(2)$ の S^6 への作用の orbit は $H=1$, $L=U(1)\times 1=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in U(2)\right\}$, $K=U(1)\times U(1)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\in U(2)\right\}$ となる。

以下定理の証明の概略を示す. 次の事実が知られる ([B]$_1$, [B]$_2$, [U]).

(a) $M=M_1\underset{f}{\cup}M_2$

M_1 は G/L 上の equivariant l-disk bundle, M_2 は G/K 上の equivariant k-disk bundle で, $f:\partial M_1\to\partial M_2$ は equivariant diffeomorphism である.

(b) $\dim G/K<\dim G/L$.

(c) G/K, G/L は simply connected, 従って K, L は connected である。

(d) G/K における slice 表現から引き起こされる K の S^{k-1} への作用は codimension 1 の principal orbit K/H と 2 つの singular orbits K/L_1, K/L_2 (L_1, L_2 は G において L と共役な K の subgroup) をもつ。

(e) $\chi(M)=\chi(G/K)+\chi(G/L)-\chi(\partial M_1)$ ($\chi(\ )$ は Euler characteristic).

次の Lemma が得られる.

LEMMA 1. $n+1=k+l$ で $G/K=S^{l-1}$, $G/L=S^{k-1}$.

証明は $M_0=\partial M_1\underset{f}{=}\partial M_2$ とおくと Mayer-Vietoris exact sequence により. $H^i(G/K)\oplus H^i(G/L)\to H^i(M_0)$ が $0<i<n-1$ で同型, これより $\partial M_1\underset{\mathbb{Z}}{\approx}S^{l-1}\times G/L$, $\partial M_2\underset{\mathbb{Z}}{\approx}S^{k-1}\times G/K$ (spaces X, Y について $X\underset{\mathbb{Z}}{\approx}Y$ は $H^*(X;\mathbb{Z})\approx H^*(Y;\mathbb{Z})$ を表わす) が得られ, Lemma はこれからすぐ出る.

以下 G の M への作用は almost effective と仮定する。従って, $G = T^r \times G_1 \times \cdots \times G_s$ (T^r は r-次元トーラス, G_i は simply connected simple Lie group) としてもよい.

<u>LEMMA 2</u>. n は even である.

<u>証明</u>. n が odd であると仮定する. l が odd ならば [W] の結果により $K/H = K/L_1 \times K/L_2$ となる. これより k が even で $n+1 = k + l$ と矛盾. l が even のとき [W] により次の5つの場合が起り得る.

I. $K/L_1 = K/L_2 = S^{k-l}$, $K/H = K/L_1 \times K/L_2$

II $K/L_1 = K/L_2 = pt.$

III. K の S^{k-1} の作用の ineffective kernel の identity component を W とする; $K = K_1 \circ W$ (semi-direct product), $H = H_1 \circ W$, $L_i = L_i' \circ W$. このとき K_1 は rk 2 の center が trivial な compact simple Lie group, $H_1 = T^2$, L_i' は $T^1 \times A_1$ と local isomorphic ($L_i' \sim T^1 \times A_1$ とかく).

IV $k = 14$, $l = 6$, $K_1 = Ad\, C_3$, $H_1 \sim C_1 \times C_1 \times C_1$, $L_i' \sim C_1 \times C_2$.

V. $k = 26$, $l = 10$ $K_1 = F_4$, $H_1 = D_4$, $L_i' = B_4$.

I は起り得ない. 実際 $k = 2l - 2$ で fibre bundle $K/L_1 = S^{l-2} \longrightarrow G/L_1 = S^{n+1} \to G/K = S^{l-1}$ これは $l > 2$ より不可能.

II は起り得ない. III ~ V の場合は G, L が semi-simple となるが III は不可能. G の G/K への自然な作用の ineffective kernel の identity component とする. $W \cap Z$ が G の normal subgroup となり従って $(W \cap Z)_0 = 1$, 故に $Z = K_1$ or $Z = 1$. IV の場合 $Z = 1$ のとき

$G/K = S^5$ より $G = B_3, A_2$，これは $G/L = S^{13}$ に transitive に作用し得ない．$Z = K_1$ のとき，$G = G' \times K_1$，$G' = D_3, A_2$，$K_1 \sim C_3$．G は $G/L = S^{13}$ に transitive になり得ない．V も同様な議論で不可能 ⌟

n を even とする．(e) より k が even, l が odd であることがわかる．更に [W] の結果より $K/H = K/L_1 \times K/L_2$，$H \approx L_1 \cap L_2$ となり $l = 2r+1$ とおくと $k = 4r$, $n = 6r$ が得られる。

V を G の G/L への自然な作用の ineffective kernel の identity component とする；$G = G' \times V$，$L_1 = (L_1 \cap G')_0 \cdot V$．

<u>LEMMA 3</u>．V の maximal torus を T_V とすると $T_V \subset H$．

<u>証明</u>．B を singular orbits の union とする．$B \subset F(T_V, M)$ は明らか．$B = F(T_V, M)$ と仮定すると B は $4r$-dim. integral homology sphere で $B - G/K$ は $S^1 - \{pt\}$ 上の G/L を fibre とする fibre bundle，従って $B - G/K \approx G/L \times \mathbb{R}^1$．両辺の homology を考えて矛盾．故に $B \subsetneqq F(T_V, M)$ 即ち $T_V \subset H$．□

以下 $r > 2$ と仮定する．

<u>LEMMA 4</u>．U を G の G/K への自然な作用の ineffective kernel の identity component とすると U の K/L_1 への自然な作用は non-transitive．

証明は [U] と殆んど同じである．この LEMMA より U の simple factor はすべて $rk \leq 1$ となる．$L_1' = L_1 \cap G''$ とおく．ただし $G = G'' \times U$．このとき $L_1/H = L_1'/L_1' \cap H$ が示される．

<u>PROPOSITION 5</u>．G の G/L への自然な作用は almost effective である．

<u>証明</u>. $G = G' \times V = G'' \times U$ (V, U はこれまでの記号). $L_1 \subset K$ より $V \subset U$. 従って $G'' \subset G'$. $G' \cap L_1$ は L_1/H に transitive; $S^{2r-1} = L_1/H = L_1 \cap G' / L_1 \cap G' \cap H$. 従って $\mathrm{rk}(L_1 \cap G') = \mathrm{rk}(L_1 \cap G' \cap H) + 1 = \mathrm{rk}(H \cap G') + 1$. $(H \cap G')_0 \times (H \cap V)_0$ は H の normal subgroup であり LEMMA 3 より $\mathrm{rk}((H \cap G')_0 \times (H \cap V)_0) = \mathrm{rk}\, H$ が示されるから $H = (H \cap G')_0 \times (H \cap V)_0$. 従って $L_1/H = G' \cap L_1 / G' \cap H \times V / H \cap V$ より $V = H \cap V$ 即ち $V \subseteq H$. 故に $V = 1$ □

$G/L_1 = S^{4r-1}$ より G の可能性は D_{4r}, A_{2r-1}, $A_{2r-1} \times T^1$, C_r, $C_r \times T^1$, $C_r \times C_1$, B_4 $(r=4)$ であるがこれらは $G/K = S^{2r-1}$ に transitive に作用し得ない.

$r = 2, 1$ の場合を考える.

<u>$r = 2$ のとき</u>; $G/L = S^7$, $G/K = S^4$, $L/H = S^3$, $K/H = S^3 \times S^3$.

fibre bundle $L/H \to G/H \to G/L$ より $\pi_1(G/H) = \pi_2(G/H) = 1$. 従って G は semi-simple. $G = G_1 \times \cdots \times G_s$ とおくと $\mathrm{rk}\, G = \mathrm{rk}\, K$ より $K = K_1 \times \cdots \times K_s$ ($K_i \subseteq G_i$ で $\mathrm{rk}\, K_i = \mathrm{rk}\, G_i$). G の G/L への自然な作用の ineffective kernel の identity component を $G_{k+1} \times \cdots \times G_s$ とおけば $k = 1$ か 2 である. U を G の G/K への自然な作用の ineffective kernel の identity component とすると $k = 1$ のとき $U = G_2 \times \cdots \times G_s$. $G_1 = D_4$, A_3, C_2, B_3 のいづれかであるがこれは $G/K = G_1/K_1 = S^4$ とはなり得ない. $k = 2$ のときも同様な議論で矛盾.

<u>$r = 1$ のとき</u>; $G/L = S^3$, $G/K = S^2$, $K/L = S^1$, $L/H = S^1$.

このときは $G = T^1 \times G_1 \times \cdots \times G_s$, H_0 は semi-simple であること

が容易にわかる．VをGのG/Lへの自然な作用のineffective kernelのidentity componentとする；$G = G' \times V$, $L = (L \cap G')_0 \cdot V$.

容易に$G' = A_1 \times A_1$, A_1 or $A_1 \times T^1$となることがわかる．$G' = A_1 \times A_1$, A_1とならないこともすぐわかる．$G' = A_1 \times T^1$のとき$G = A_1 \times T^1$, $K = T^1 \times T^1$, $L = T^1$, $H_0 = 1$が示される．従って$G = U(2)$とすれば，$K = U(1) \times U(1)$, $L = U(1) \times 1$. GのMへの作用のineffective kernelをNとすれば，$N \subseteqq Z(G) \cap L$. これより$N = 1$. Kのsubgroups L_1, L_2でL_iはGの中でLに共役で$L_1 \cap L_2 = 1$となるものがあるから$H = L_1 \cap L_2 = 1$. 以上により定理のorbit structureに関係する部分が証明された．

次にcontinuous actionとして我々のorbit structureをもつものがすべてequivalentであることを示す．

orbit space M^*を$\{z \in \mathbb{C}^1 ; |z| \leqq 1\}$と同一視する．$M^*_+ = \{x^* \in M^* ; \operatorname{Im} x^* \geqq 0\}$, $M^*_- = \{x^* \in M^* ; \operatorname{Im} x^* \leqq 0\}$とおくとcross section

$$\varphi_+ : M^*_+ \to M \qquad G_{\varphi_+(x^*)} = \begin{cases} H & |x^*| < 1 \\ L & |x^*| = 1 \end{cases}$$

$$\varphi_- : M^*_- \to M \qquad G_{\varphi_-(x^*)} = \begin{cases} H & |x^*| < 1 \\ L & |x^*| = 1, \ \operatorname{Re} x^* \neq 0 \\ K & |x^*| = 1, \ \operatorname{Re} x^* = 0. \end{cases}$$

が存在することが示される．$A^* = M^*_+ \cap M^*_-$とおく．

$x^* \in A^*$, $|x^*| < 1$ ならば，$\exists f(x^*) \in G$; $f(x)\varphi_-(x) = \varphi_+(x)$.

即ちcontinuous map $f : (-1, 1) \to G$が得られる．明らかにfは

$\lim_{x\to\pm1} f(x)\in N_L$ をみたす. homotopy $h_t : U(2)\to U(2)$ で $h_0=id$. h_1 は N_L の近傍を N_L に移すものが存在する. $f'=h_1\circ f$ とおけば これは f と homotopic で homotopy $h_t\circ f$ について $\lim_{x\to\pm1}(h_t\circ f)(x)\in N_L$ がなりたつ.
従って f は $f':[-1,1]\to G$ で $f'(\pm1)\in N_L$ をみたす map の $(-1,1)$ への制限と homotopic である. この f' を φ_-, φ_+ の comparison function という.

LEMMA 5. $f_0, f_1 : [-1,1]\to G$ で $f_i(\pm1)\in N_L$ をみたす任意の map f_0, f_1 について $\exists F : [-1,1]\times I\to G$; $F(t,i)=f_i(t)$ $i=0,1$

$$F(\pm1,t)\in N_L \quad 0\le t\le 1.$$

上の性質をもつ map は $S^1=[-1,1]/\{\pm1\}\to G/N_L=S^2$ を induce することよりすぐわかる.

LEMMA 5 の f_0, f_1 を homotopic rel. $\{\pm1\}$ ということにする.

LEMMA 6. $f_0, f_1 : [-1,1]\to G$, $f_i(\{\pm1\})\in N_L$ で homotopic rel. $\{\pm1\}$ ならば, $f_0\cdot f_1^{-1} : [-1,1]\to G$ は constant map に homotopic rel. $\{\pm1\}$ である.

f_0, f_1 の homotopy を $F : [-1,1]\to G$ とするとき $H(x,t)=F(x,t)\cdot F(x,1)^{-1}$ とおけば, $f_0\cdot f_1^{-1}$ と constant map $e : [-1,1]\to G : x\mapsto 1$ の homotopy である.

LEMMA 7. cross sections $(\varphi_-^0,\varphi_+^0)$, $(\varphi_+^1,\varphi_-^1)$ の comparison functions をそれぞれ f_0, f_1 とおく. $f_0\simeq f_1$ rel. $\{\pm1\}$ ならば

$$\exists\varphi : M_+^*\to G \quad : \varphi(M_+^*\cap B^*)\subset N_L.$$

$M_+^*\simeq[-1,1]\times I$ より LEMMA 6 の H を用いて φ が作れる.

$(\varphi_-^0,\varphi_+^0)$, $(\varphi_-^1,\varphi_+^1)$ を LEMMA 7 の cross sections とするとき, $\bar\varphi_+^1(x)=\varphi(x)\,\varphi_+^1(x)$ とおけば $\bar\varphi_+^1 : M_+^*\to M$ は cross section で, $(\varphi_-^1,\bar\varphi_+^1)$ の

comparison function は明らかに f_0 である。

$C_0 = \mathrm{Im}\,\varphi_-^0 \cup \mathrm{Im}\,\varphi_+^0$, $C_1 = \mathrm{Im}\,\varphi_-^1 \cup \mathrm{Im}\,\bar{\varphi}_+^1$ とおくと、C_0, C_1 は M の閉集合で $GC_0 = GC_1 = M$ である。$\psi : C_0 \to C_1$ を $\psi(\varphi_-^0(x)) = \varphi_-^1(x)$, $\psi(\varphi_+^0(x)) = \bar{\varphi}_+^1(x)$ と定義すれば ψ は連続で、

$$\psi(f_0(x)\varphi_-^0(x)) = \psi(\varphi_+^0(x)) = \bar{\varphi}_+^1(x) = f_0(x)\varphi_-^1(x) = f_0(x)\psi(\varphi_-^0(x))$$

がなりたつ。次の結果より定理の equivalence の部分が示される。

PROPOSITION 8. G を compact Lie group, X_1, X_2 を Hausdorff G-spaces, $C_i \subset X_i$ を閉集合で $GC_i = X_i$ $(i=1,2)$ をみたすとする。このとき $\psi : C_1 \to C_2$ で $g \in G$, $x \in C_1$, $gx \in C_1$ ならば $\psi(gx) = g\psi(x)$ をみたす ψ は一意的に equivariant map $\hat{\psi} : X_1 \to X_2$ に拡張できる。

証明 $[B]_1$, $[B]_2$

REMARK 2. 定理の equivalent が可微分作用としてなりたつかどうか不明である。$s = 2$ のとき $n \geq 16$ で orbit structure が決定できる。

文献

$[B]_1$ Bredon, G. E.; Introduction to compact transformation groups. Academic Press, 1972

$[B]_2$ Bredon, G. E.; Transformation groups on spheres with two types of orbits, Topology 3 (1965) 103-113

[U] Uchida, F; Compact Transformation groups on complex projective spaces

[W] Wang, H. C: Amer. J. Math. 82 (1960) 698-748.